CI3725 - Traductores e Interpretadores
Abril-Julio 2006
Prof. Ernesto Hernández-Novich

Laboratorio Semana V

Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares (Pumping Lemma)

Sea L un lenguaje regular. Entonces existe una constante n tal que si z es cualquier palabra en L y $|z| \geq 1$ entonces puede escribirse $z = uvw$ tal que $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$ y $\forall i \geq 0, uv^iw \in L$.

El Lema de Bombeo es útil para demostrar que un lenguaje **no** es regular. La estrategia es asumir que el lenguaje es regular y aprovechar la necesidad del Lema de Bombeo para encontrar una contradicción.

Ejemplo 1

Sea $L = \left\{0^{i^2} | i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\right\}$, el lenguaje de cadenas de 0 tales que su longitud es un cuadrado perfecto. Queremos demostrar que L **no** es regular usando el Lema de Bombeo.

Supongamos que L es en efecto regular, y para aplicar el Lema de Bombeo fijamos un n cualquiera. Esto quiere decir que si $z = 0^{n^2}$ está en L y de acuerdo con el Lema de Bombeo puedo escribir $z = uvw$ con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$ y además $\forall i \geq 0, uv^iw \in L$.

Observemos lo que ocurre cuando $i = 2$. En primer lugar sabemos que $z = 0^{n^2} \wedge z = uvw \Rightarrow |uvw| = n^2$, y por otro lado $|uvw| < \left|uv^2w\right|$, es decir $n^2 < \left|uv^2w\right|$. Pero al mismo tiempo observamos que $\left|uv^2w\right| = |uvvw| = |uvw| + |v| = n^2 + |v| \leq n^2 + n$, pues $1 \leq |v| \leq n$ según el Lema de Bombeo. Y también es cierto que $n^2 + n \leq (n+1)^2$. De manera que nos queda

$$n^2 < \left|uv^2w\right| \leq n^2 + n < (n+1)^2$$

esto es, la longitud de $\left|uv^2w\right|$ es estrictamente mayor que un cuadrado perfecto y estrictamente menor que el siguiente cuadrado perfecto, por lo tanto no es un cuadrado perfecto, i.e. $\left|uv^2w\right| \notin L$ que contradice el Lema de Bombeo, por lo tanto L no puede ser regular como habíamos asumido.

Ejemplo 2

Sea L el lenguaje sobre $\{0, 1\}$ tal que las cantidades de 0 y 1 sean iguales sin importar el orden en que aparecen en las cadenas. Queremos demostrar que L **no** es regular usando el Lema de Bombeo.

Supongamos que L en efecto es regular, y para aplicar el Lema de Bombeo fijamos un n cualquiera. Escojamos $z = 0^n1^n$ que está en L y de acuerdo con el Lema de Bombeo puedo escribir $z = uvw$ con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$ y además $\forall i \geq 0, uv^iw \in L$.

Como $|uv| \leq n$ y uv es un prefijo de z, es evidente que $uv = 0^k$, con $k \leq n$. Esto implica que uv^i también estará constituido exclusivamente por 0 y en el caso $i = n + 1$, uv^i tendrá más 0 que 1 en w. Por tanto, $uv^iw \notin L$ que contradice el Lema de Bombeo, por lo tanto L no puede ser regular como habíamos asumido.

Ejemplo 3

Sea L el lenguaje de cadenas de 1 tales que su longitud es un número primo. Queremos demostrar que L **no** es regular usando el Lema de Bombeo.

Supongamos que L en efecto es regular, y para aplicar el Lema de Bombeo fijamos un n cualquiera. Puesto que hay un número infinito de números primos, siempre podremos encontrar p primo tal que $p \geq n + 2$ y así consideramos la cadena $z = 1^p$. Como $z \in L$ el Lema de Bombeo nos permite escribir $z = uvw$ con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$, y además $\forall i \geq 0, uv^iw \in L$.

Digamos que $|v| = m$. Como $|uvw| = p$, entonces $|uw| = p - m$. Consideremos el caso en que $i = p - m$, esto es $uv^{p-m}w$. Podemos ver que

$$\left|uv^{p-m}w\right| = |uw| + (p-m)|v| = (p-m) + (p-m)m = (p-m)(m+1)$$

de modo que la longitud de la cadena es el producto de dos números. Hemos dicho que $|v| = m$ y según el Lema de Bombeo $|v| \geq 1$, por lo tanto $m + 1 > 1$ así que el segundo factor no es 1. Del mismo modo, como $|v| \leq |uv| \leq n \Rightarrow m \leq n$, y como escogimos $p \geq n+2$, sigue que $p-m \geq n-n+2 \Rightarrow p-m \geq 2 \Rightarrow p-m > 1$ así que el primer factor no es 1. De manera que la longitud de la cadena resultante es el producto de dos números y ninguno de los dos es 1, en consecuencia no es un número primo y entonces $|uv^{p-m}w| \notin L$ contradiciendo el Lema de Bombeo, por lo tanto L no puede ser regular como habíamos asumido.

Diseño de Gramáticas

Escribiremos algunas gramáticas para lenguajes simples. En la próxima clase verificaremos que las gramáticas efectivamente generan el lenguaje deseado.

Ejemplo 1

Gramática sobre $\Sigma = \{(,)\}$ para reconocer/producir expresiones correctamente parentizadas incluyendo λ, e.g. $(), (()()), ((()())(), \ldots$

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & \lambda \\ S & \rightarrow & S(S) \end{array}$$

Ejemplo 2

Gramática sobre $\Sigma = \{a, b\}$ para reconocer/producir cadenas que tienen igual cantidad de a y b sin importar el orden incluyendo λ, e.g. $abba, baaabb, babbaaba, abbbaaab, \ldots$

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & \lambda \\ S & \rightarrow & SaSbS \\ S & \rightarrow & SbSaS \\ S & \rightarrow & SS \end{array}$$

¿Por qué es necesaria la última regla?

Ejemplo 3

Gramática sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$ para reconocer/producir cadenas de la forma $a^n b^m c^{2n+m}$ con $m, n > 0$. Nótese que $2n + m = m + 2n$ de modo que podemos pensar que por cada a a la izquierda deben aparecer dos c en el extremo derecho; luego de acabar con las a, comenzarán las b internas, cada una de las cuales debe tener su correspondiente c a la derecha.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aScc \\ S & \rightarrow & aAcc \\ A & \rightarrow & bAc \\ A & \rightarrow & bc \end{array}$$